

روش رهایی پویا با میرایی متمرکز

سیده فاطمه لبافی^۱، سیدرضا سرافرازی^{۲*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد عمران- سازه، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند

۲- استادیار، گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند

*srsarafrazi@birjand.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۹۵/۱۰/۱۰]

تاریخ دریافت: [۹۴/۰۸/۰۴]

چکیده

در تحلیل هر نوع سازه‌ای نیاز به حل یک دستگاه معادله‌های خطی یا ناخطی است. روش‌های گوناگون مستقیم و تکراری برای حل چنین دستگاهی وجود دارند. در شیوه‌های تکراری دقت یافتن پاسخ‌ها قابل تعیین است و با تکرار محاسبه می‌توان خطاها را کاهش داد. یکی از فرآیندهای ساده و توانمند این دسته، فن رهایی پویا می‌باشد. شیوه‌ی رهایی پویا با افزودن نیروهای اینرسی و میرایی ساختگی، سامانه ایستا را به فضای پویا می‌برند. با انتخاب مناسب عامل‌های ساختگی، سامانه پویا به پاسخ ایستا همگرا خواهد شد. در این مقاله، نخست مروری از پژوهش‌های انجام شده برای تعیین عامل‌های رهایی پویا ارائه می‌گردد. سپس، پایه‌های ریاضی شیوه‌ی پیشنهادی می‌آید. در راهکار مزبور، همانند روش سنتی رهایی پویا عامل‌های جرم و گام زمانی وجود دارد. ولی عامل میرایی در گام‌های خاصی وارد می‌شود تا کارمایه جنبشی را به سوی صفر برود و پاسخ سامانه‌ی ایستا به دست آید. با کاربرد عامل میرایی به صورت متمرکز در شمار محدودی از گام‌ها، حجم محاسبات کاهش می‌یابد. همچنین نتیجه‌های عددی در تحلیل قاب و خرپا نشانگر بهبود نرخ همگرایی است. افزون بر برتری‌های کاربردی، شیوه‌ی پیشنهادی دو راهکار متفاوت میرایی سنتی و میرایی جنبشی را در قالب یک روش ارائه می‌دهد.

واژگان کلیدی: روش سنتی رهایی پویا، میرایی جنبشی، کارمایه جنبشی، میرایی متمرکز.

۱- پیشگفتار

مربوط به اصل دوم ریچاردسون است که به وسیله فرانکل گسترش داده شد و در مساله‌های انتقال حرارت به کار رفت [2]. سپس، روش رهایی پویا برای نخستین بار در سال ۱۹۶۵ به وسیله اتر معرفی شد. این پژوهشگر با مقایسه‌ی فن مزبور با سایر روش‌های تکراری توانایی آن را نشان داد [3]. پس از آن، پژوهشگران زیادی برای تحلیل سامانه‌های خطی از این روش استفاده کردند. این تلاش‌ها تا هم اکنون برای بهبود روش ادامه یافته است. به تازگی، نزدیک به دوازده روش رهایی پویای جدید نیز ارائه شده است [4]. رشتن اولین کسی بود که از این روش برای تحلیل ناخطی استفاده کرد [5]. برو و برتن رابطه‌های روش رهایی پویا را با کاهش مرتبه معادله تعادل پویا به یک، به دست آوردند و با نوشتن شرط‌های پایداری

شیوه‌های حل دستگاه معادله‌های به دست آمده از تحلیل سازه را می‌توان به دو گروه تقسیم نمود. دسته‌ی نخست، با انجام محاسبه‌های سطری روی ماتریس ضرایب به حل دستگاه می‌پردازد. گروه دوم، از فرآیند تکراری برای یافتن پاسخ سود می‌جویند. این گونه از فرآیندها، با یک پاسخ نخستین آغاز می‌شوند و با عملیات تکراری خطای پاسخ‌ها را کاهش می‌دهند. روش رهایی پویا، یکی از این شیوه‌های تکراری است که با افزودن میرایی و جرم ساختگی به یک سامانه‌ی ایستا، مساله‌ای پویا به وجود می‌آورد. عامل‌های میرایی و جرم ساختگی به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که فرآیند تکراری زودتر به پاسخ واقعی سازه همگرا شود [1]. پایه ریاضی این روش

به دست آوردند و سبب کاهش شمار تکرار این روش شدند [19]. کدخدایان و همکارانش گام زمانی بهبودیافته را از کمینه نمودن نیروی نامیزان، محاسبه کردند [20]. رضایی پزند و علامتینان با استفاده از معیار کارمایه کمینه، گام زمانی بهینه را معرفی نمود [21]. پس از آن، این دو پژوهشگر برای به دست آوردن ناحیه‌های بازگشتی بار و تغییر مکان سازه‌ها از روش رهایی پویا استفاده کرده و رابطه‌سازی‌های نوینی را پیشنهاد دادند که توانایی پیمایش چنین مسیره‌های ایستایی را داشت [22]. آن‌ها، همچنین خطای تغییر مکان بین دو گام را کمینه نموده و الگوهای جدیدی برای جرم و میرایی ساختگی پیشنهاد کردند [23]. رضایی پزند و سرافرازی نیز نسبت گام زمانی بهینه و میرایی را در روش رهایی پویا با استفاده از اثر مقادیر ویژه به دست آوردند. با در نظر گرفتن میرایی صفر، نسبت گام زمانی به وسیله این نویسندگان در پژوهش دیگری تعیین شد [24]. رضایی پزند و رضایی همچنین از شیوه‌ی تکرار بردار وارون برای یافتن عامل میرایی در تکرارهای رهایی پویا استفاده کردند و رابطه‌سازی نوینی را پیشنهاد دادند [25].

در این مقاله، از راهکاری جدید برای یافتن عامل میرایی در فرآیند رهایی به صورت میرایی متمرکز بهره‌جویی می‌شود. مهم‌ترین ویژگی شیوه‌ی مزبور ارتباط دادن دو شیوه‌ی متفاوت رهایی پویای سنتی و میرایی جنبشی است. افزون بر این، فرآیند پیشنهادی می‌تواند شمار تکرارها را کم و نرخ همگرایی را بهبود دهد. برای نشان دادن ویژگی‌های راهکار جدید، چندین خریای مستوی و فضایی و همچنین قاب مستوی با رفتار خطی و ناخطی تحلیل شده‌اند و پاسخ‌های به دست آمده با دیگر شیوه‌های رهایی پویا مقایسه شده است.

۲- روش سنتی رهایی پویا

دستگاه معادله‌های ایستایی در روش رهایی پویا به فضای پویای ساختگی برده می‌شود. این کار با افزودن جرم و میرایی دروغی به رابطه‌ی ایستایی سازه مانند معادله‌ی (۱) انجام می‌پذیرد [17].

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [S]\{X\} = \{P\} \quad (1)$$

در این رابطه، $[M]$ ماتریس جرم، $[C]$ ماتریس میرایی،

عددی برای جرم و میرایی، آن را در مساله‌های خطی و ناخطی قاب‌ها به کار بردند [6]. هم‌زمان وود نشان داد نرخ همگرایی روش رهایی پویا در مساله‌های خطی بیش‌تر از راهکارهای نیمه تکراری است [7]. بونس روشی را برای تخمین میرایی بحرانی ارائه داد [8]. از سوی دیگر، میرایی جنبشی را کاندال پیشنهاد نمود [9]. او با حذف میرایی، روند روش رهایی پویا را تغییر داد. در این روش وقتی کارمایه جنبشی کل سامانه بیشینه شود، سرعت در آن گام صفر در نظر گرفته می‌شود. روش رهایی پویای جنبشی به وسیله تاپینگ در سال ۲۰۰۷ بهبود یافت [10].

نخستین شرط‌های پایداری به وسیله کسل و هوبس پیشنهاد شد. آن‌ها مقادیرهای حدی جرم ساختگی را از نگره گرشگورین تعیین کرده و آن را در مسائل ناخطی به کار بردند [11]. در ادامه فرایز از روش رهایی پویا برای تحلیل ناخطی صفحه‌ها استفاده کرد و مقادیرهای جرم و میرایی ساختگی را بهبود داد [12]. پاپادراکاکیس نیز در مورد تأثیر مقدار خطا در روند رهایی پویا پژوهش کرد و روشی را پیشنهاد داد که عامل‌های رهایی پویا را به طور خودکار محاسبه کند [13]. آندروود مرسوم‌ترین رابطه‌سازی صریح رهایی پویا را پیشنهاد کرد. از دیگر پژوهش‌های این زمینه می‌توان به گسترش رابطه‌های شیوه‌ی رهایی پویا به وسیله کوانگ اشاره نمود [14]. الشاوی و ماردیرسون با وزن‌دار کردن جرم و میرایی هر درجه آزادی، روش رهایی پویا را برای حل اجزای محدود صفحه‌های خمشی استفاده نمودند [15]. ژانگ و یو روش رهایی پویا را بهبود داده و راهی برای حدس بهتر مقدار جابه‌جایی نخستین یافتند [16]. همچنین، ژانگ و همکارانش با گسترش روش رهایی بهبود یافته، عامل میرایی را برای هر گره از سازه تعریف کردند [17]. مونجیزا و همکاران میرایی متناسب با جرم و سختی را پیدا نمودند و نشان دادند که وقتی ماتریس میرایی به صورت $2M(M^{-1}S)^{0.5}$ در نظر گرفته شود همه مودها دارای میرایی بحرانی خواهند بود [18].

از جمله پژوهش‌های جدیدی که در این زمینه انجام شده است، پژوهش رضایی پزند و تقویان حکاک است که با گسترش دنباله تیلور رابطه‌ی تکراری نوی برای فن رهایی پویا

در شیوه‌ی رهایی پویا ماتریس جرم را قطری می‌پندارند. از این رو، درآیه‌های حاصل $\{R^n\} = [M^n]^{-1} \{P^n\}$ را می‌توان به شکل R_i^n / m_{ii}^n نوشت که عامل‌های R_i^n و m_{ii}^n ، به ترتیب، نیروی نامیزان درجه آزادی i ام و درآیه‌ی قطری i ام از ماتریس جرم در مرحله n ام است. نیروی نامیزان که تفاوت نیروهای خارجی و برآیند نیروهای داخلی است از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود:

$$\{R^n\} = \{P^n\} - \{f^n\} = [M] \{\ddot{X}^n\} + [C] \{\dot{X}^n\} \quad (7)$$

در این رابطه، ماتریس جرم، عامل میرایی و گام زمانی نامعلوم‌اند. مرسوم‌ترین راهکار برای تعیین درآیه‌های قطری جرم، استفاده از نگره‌گرشگورین است. رضایی‌پژند و علامتیان با استفاده از این نگره و کمینه‌سازی خطای تغییرمکان رابطه‌ی کلی زیر را برای مقادیرهای جرم ارائه دادند [23]:

$$m_{ii} = \frac{(\tau^n)^2}{4} \text{Max} \left[\sum_{i=1}^{ndof} |S_{ij}|, 2S_{ii} \right] \quad (8)$$

عامل N dof بیانگر شمار درجه‌های آزادی می‌باشد. بر اساس نگره‌ی پویای سازه‌ها، اگر میرایی سازه بحرانی باشد، نرخ همگرایی به پاسخ بیشینه می‌شود. بنابراین برای تخمین میرایی بحرانی، اصل ریلی به کار می‌رود [17].

$$c^n = 2 \sqrt{\frac{\{X^n\}^T \{f(X^n)\}}{\{X^n\}^T [M] \{X^n\}}} \quad (9)$$

افزون بر این، راهکارهای دیگری نیز برای تعیین عامل میرایی در دست است. در بسیاری از راهبردهای رهایی پویا، گام زمانی ثابت و برابر یک فرض می‌شود. با وجود این، روش‌های دیگری نیز برای تعیین گام زمانی بر اساس اصل ریلی پیشنهاد شده است [13]. همچنین، گام زمانی بهبودیافته را می‌توان با کمینه کردن نیروی نامیزان سازه پیدا کرد [20].

در ادامه، گام‌های فرآیند مرسوم رهایی پویا ارائه می‌شود:

۱- در نظر گرفتن بردار سرعت نخستین $\{\dot{X}^{-1/2}\} = \{0\}$ ، تغییرمکان $\{X^0\}$ ، مقدار خطا ε_r ، گام زمانی $\tau^0 = 1$

$\{S\}$ و $\{P\}$ ، به ترتیب، ماتریس سختی و بردار نیروهای وارد بر سازه است. همچنین، عامل‌های $\{X\}$ ، $\{\dot{X}\}$ ، $\{\ddot{X}\}$ ، تغییرمکان، سرعت و شتاب سامانه است. برای ساده‌سازی، ماتریس جرم ساختگی قطری در نظر گرفته می‌شود و عامل‌های شتاب و سرعت با کمک فن تفاوت‌های محدود مرکزی به صورت تقریبی زیر ارائه می‌شوند:

شکل ۱. فاصله زمانی در روش تفاوت محدود

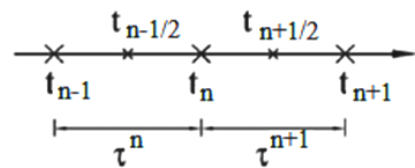


Fig. 1. Time step in finite difference method

$$\{\dot{X}^{n+1/2}\} = \frac{1}{\tau^{n+1}} (\{X^{n+1}\} - \{X^n\}) \quad (2)$$

$$\{\dot{X}^n\} = \frac{1}{2} (\{\dot{X}^{n-1/2}\} + \{\dot{X}^{n+1/2}\}) \quad (3)$$

$$\{\ddot{X}^n\} = \frac{1}{\tau^n} (\{\dot{X}^{n+1/2}\} - \{\dot{X}^{n-1/2}\}) \quad (4)$$

افزون بر این، به طور معمول، ماتریس میرایی به صورت ضربی از ماتریس جرم تعریف می‌شود. این رابطه را می‌توان به صورت $[C^n] = c^n [M^n]$ نوشت که در آن عامل c^n ضریب میرایی گام n ام را نشان می‌دهد. با جای‌گذاری مقادیرهای سرعت و شتاب و تعریف ماتریس میرایی در معادله‌ی تعادل سامانه پویای گام n ، سرعت در زمان $t^{n+1/2}$ به دست می‌آید و سپس پاسخ گام بعدی حساب می‌شود:

$$[M^n] \{\ddot{X}^n\} + [C^n] \{\dot{X}^n\} = \{P\} - [S] \{X^n\} = \{R^n\}$$

$$[M^n] \frac{1}{\tau^n} \left(\{\dot{X}^{n+1/2}\} - \{\dot{X}^{n-1/2}\} \right) +$$

$$c^n [M^n] \frac{1}{2} (\{\dot{X}^{n-1/2}\} + \{\dot{X}^{n+1/2}\}) = \{R^n\}$$

$$\left(1 + \frac{\tau^n c^n}{2}\right) \{\dot{X}^{n+1/2}\} - \left(1 - \frac{\tau^n c^n}{2}\right) \{\dot{X}^{n-1/2}\} = \tau^n [M^n]^{-1} \{R^n\}$$

$$\{\dot{X}^{n+1/2}\} = \frac{2 - \tau^n c^n}{2 + \tau^n c^n} \{\dot{X}^{n-1/2}\} + \frac{2\tau^n}{2 + \tau^n c^n} [M^n]^{-1} \{R^n\} \quad (5)$$

$$\{X^{n+1}\} = \{X^n\} + \tau^{n+1} \{\dot{X}^{n+1/2}\} \quad (6)$$

$$\{\dot{X}^{n+1/2}\} = \frac{t^n}{2} [M] \{R^n\} \quad (11)$$

شایان توجه است، در رابطه‌ی مزبور نیروی باقیمانده بر اساس پاسخ $\{X^{n-1/2}\}$ به دست می‌آید.

$$\{X^{n-1/2}\} = \{X^{n+1}\} - \frac{3}{2} t^{n+1} \{\dot{X}^{n+1/2}\} + \frac{(t^n)^2}{2} [M] \{R^n\} \quad (12)$$

۴- فرآیند پیشنهادی

یادآوری می‌کند، در روش رهایی پویا عامل‌های جرم، میرایی و گام زمانی نامعلوم‌اند. به طور معمول، رابطه‌های در دسترس توانایی تعیین همزمان همه‌ی عامل‌های مساله را ندارند. شماری از پژوهشگران گام زمانی را ثابت و برابر یک می‌پندارند و جرم و میرایی بحرانی را حساب می‌کنند. شماری دیگر با در نظر گرفتن میرایی صفر سراغ محاسبه گام زمانی متغیر و جرم می‌روند. آشکار است، اگر عامل میرایی در روش مرسوم صفر در نظر گرفته شود سامانه در حالت ارتعاش آزاد قرار می‌گیرد و همگرا نمی‌شود. از این رو، سامانه را به شکل دیگری مجبور به همگرایی می‌کنند. شیوه‌ی میرایی جنبشی تاپینگ [10] و میرایی صفر رضایی‌پژند-سرافرازی [24] در این دسته جا دارند.

در روش میرایی جنبشی، همگامی که کارمایه جنبشی بیشینه مقدار خود را دارد، سرعت سامانه را صفر می‌کنند و دوباره آن را رها می‌نمایند. این کار سبب هدررفت کارمایه خواهد شد و نوعی میرایی به سامانه وارد خواهد ساخت. در روش میرایی صفر مرجع [24]، میرایی با تغییر گام زمانی به دست می‌آید.

در این راهکار پیشنهادی گام زمانی ثابت پنداشته می‌شود و عامل میرایی تنها در شمار محدودی از گام‌ها به صورت متمرکز بر سامانه وارد می‌شود و در بقیه گام‌ها میرایی صفر است. در این صورت، در تمامی گام‌ها نیاز به محاسبه میرایی نخواهد بود. این میرایی متمرکز تنها در گام‌های زمانی که کارمایه بیشینه مقدار خود را دارد، محاسبه و سبب کمینه کردن کارمایه می‌شود. باید دانست، کارمایه جنبشی برای سامانه‌ی

بیشترین مقدار مجاز برای تکرار N_{max} و $n = 1$.

۲- محاسبه ماتریس سختی سازه $[S]$ و نیروی نامیزان $\{R^n\}$

۳- محاسبه ماتریس جرم $[M]$ و عامل میرایی c^n .

۴- تعیین بردارهای سرعت و تغییر مکان در گام n ام $(\{\dot{X}^{n+1/2}\}$ و $\{X^{n+1}\})$.

۵- اگر اندازه بردار نامیزان کمتر از مقدار خطاست، $\|R^n\| \leq \varepsilon_r$ ، پاسخ با دقت مناسبی به دست آمده است و محاسبه پایان می‌یابد.

۶- $n = n + 1$

۷- اگر $n \leq N_{max}$ است فرآیند تکراری بدون رسیدن به دقت مناسب پایان می‌پذیرد.

۸- محاسبه از گام ۲ تکرار می‌شود.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود فرآیند درج شده نیروی باقیمانده را در هر گام کاهش می‌دهد. به سخن دیگر، در گام‌های پیاپی برآیند نیروی داخلی سامانه افزایش می‌یابد تا به اندازه‌ی بارهای خارجی شود. از این رو، توانایی پیمایش بخش باربرداری مسیر تعادل را ندارد. روش پیشنهادی این پژوهش نیز چنین رفتاری دارد. همان‌گونه که در پیشگفتار درج شده است، فرآیندهایی از روش رهایی پویا برای پیمایش مسیر ایستایی دارای نقطه برگشت بار یا برگشت تغییر مکان نیز وجود دارند [22].

۳- روش میرایی جنبشی

در روش میرایی جنبشی نیاز به محاسبه عامل میرایی ساختگی نیست. بنابراین، عامل‌های نامعلوم برای این روش، تنها گام زمانی و جرم ساختگی است. گام زمانی را می‌توان ثابت در نظر گرفت و جرم را از رابطه‌ی زیر حساب کرد:

$$m_{ii} = \frac{(\tau^n)^2}{2} \sum_{i=1}^{ndof} |s_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, ndof \quad (10)$$

در هر گام این کارمایه جنبشی محاسبه می‌شود. هنگامی که کارمایه جنبشی بیشینه مقدار خود را دارد سرعت در گام $n - 1/2$ صفر شده و سرعت $\{\dot{X}^{n+1/2}\}$ با استفاده از رابطه‌ی زیر دوباره حساب می‌شود:

۶- به دست آوردن عامل میرایی متمرکز با استفاده از معادله‌ی (۱۷).

۷- محاسبه دوباره سرعت $\{\dot{X}^{n+1/2}\}$ ، تغییر مکان $\{X^{n+1}\}$ و کارمایه‌ی E_n .

۸- اگر $\|R^{n+1}\| \leq \varepsilon_r$ باشد محاسبه پایان می‌یابد و پاسخ مساله ارائه می‌شود.

$$n = n + 1 - 9$$

۱۰- اگر $n \leq N_{\max}$ باشد فرآیند از گام (۲) ادامه می‌یابد و در غیر این صورت، محاسبه پایان می‌پذیرد و عدم همگرایی اعلام می‌شود.

۵- نمونه‌های عددی

برای واکاوی درستی روش پیشنهادی و همچنین بررسی شمار تکرارهای لازم برای همگرا شدن فرآیند مزبور، نمونه‌های عددی زیر با روش‌های سنتی، میرایی جنبشی و همچنین شیوه‌ی پیشنهادی تحلیل خطی و ناخطی هندسی شده‌اند. خاطر نشان می‌کند، بار کل تحلیل ناخطی در ۱۰ گام به تدریج وارد می‌شود.

۵-۱- خرابای ساده دو عضوی

در نمونه نخست، یک سامانه‌ی خرابایی ساده شامل دو عضو و یک درجه آزادی تحلیل خطی و ناخطی می‌شود. در این نمونه TR1 که در شکل (۲) نشان داده شده است، مقدار سطح مقطع و ضریب کشسانی، به ترتیب، برابر $96,77 \text{ cm}^2$ و 703000 kgf/cm^2 در نظر گرفته شده و همچنین نیروی P برابر 3320000 kgf است [25]. شکل (۳) نمودار بار-تغییر مکان این سازه‌ی یک درجه آزادی را نشان می‌دهد. نتایج تحلیل که در جدول (۱) به نمایش درآمده‌اند بیانگر کاهش شمار تکرارهای روش پیشنهادی نسبت به فن میرایی جنبشی است. مقدار خطای تغییر مکان و سرعت به ترتیب 10^{-6} و 10^{-12} مجاز است. رابطه‌ی (۸) در سامانه‌ی یک درجه آزادی مقدار دقیق جرم ساختگی را به دست می‌دهد. از این رو، شیوه‌ی سنتی در این مساله، با شمار کم‌تری تکرار همگرا شده است.

یک درجه آزادی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} m V^2 \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه‌ی سرعت در رابطه‌ی کارمایه و مشتق‌گیری نسبت به میرایی می‌توان نوشت:

$$\frac{dU}{dc} = V m \frac{dV}{dc} = 0 \quad (14)$$

$$m \left(\frac{2 - c\tau}{2 + c\tau} V^{n-1/2} + \frac{2\tau}{2 + c\tau} R^n / m \right) \times \left(\frac{-4\tau}{(2 + c\tau)^2} V^{n-1/2} - \frac{2\tau}{(2 + c\tau)^2} R^n / m \right) = 0 \quad (15)$$

پاسخ معادله‌ی (۱۵) را می‌توان حساب نمود. با شبیه‌سازی

سامانه چند درجه آزادی و تک درجه آزادی می‌توان نوشت:

$$\tau \{V^{n-1/2}\} c = 2 \{V^{n-1/2}\} + 2\tau [M]^{-1} \{R^n\} \quad (16)$$

$$c = \frac{\{A\}^T \times \{B\}}{\{A\}^T \times \{A\}} \quad (17)$$

در این رابطه، بردارهای $\{A\}$ و $\{B\}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{A\} = \tau \{V^{n-1/2}\} \quad (18)$$

$$\{B\} = \{V^{n-1/2}\} + 2\tau [M]^{-1} \{R^n\} \quad (19)$$

تفاوت شیوه‌ی پیشنهادی با روش سنتی مرسوم بی‌نیازی از محاسبه میرایی در همه گام‌هاست که سبب کاهش بخشی از تلاش‌های محاسبه‌ای می‌شود. همچنین، فن میرایی جنبشی به محاسبه‌ی نیروی نامیزان در میانه گام نیاز دارد. در شیوه‌ی پیشنهادی، این کار نیز حذف شده است.

گام‌های شیوه‌ی میرایی متمرکز را می‌توان به صورت زیر ارائه داد:

۱- پنداشتن مقدارهایی برای خطا، سرعت و تغییر مکان نخستین و $n = 1$.

۲- محاسبه ماتریس‌های سختی، جرم و بردار نیروی باقیمانده.

۳- تعیین مقدارهای سرعت $\{\dot{X}^{n+1/2}\}$ و تغییر مکان $\{X^{n+1}\}$.

۴- محاسبه مقدار کارمایه‌ی جنبشی E_n .

۵- اگر $E_{n-1} < E_n$ باشد محاسبه‌ها از گام (۲) تکرار می‌شود.

جدول ۱. نتایج تحلیل خرابی دو عضوی

Type of Structure	Number of Degree of Freedoms	Method	Number of iterations		
			Proposed method (Concentrated Damping)	Kinetic Damping	Traditional Damping
Truss TR1	1	Linear	81	298	3
		Nonlinear	709	2546	112

Table 1. The analysis results of Truss TR1

نشان دهنده عملکرد خوب روش پیشنهادی در این مساله است. خاطر نشان می کند، خطای مجاز تغییر مکان و سرعت برای این خرپا 10^{-4} و 10^{-9} است.

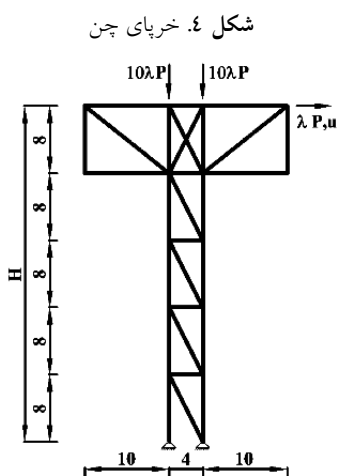


Fig. 4. Chen's Truss

شکل ۵. نمودار بار- تغییر مکان خرابی چن

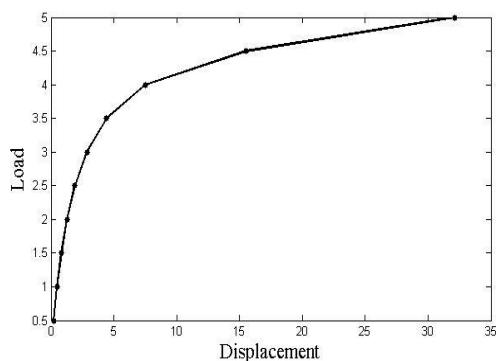


Fig. 5. Load-displacement curve of Chen Truss

شکل ۲. خرابی TR1

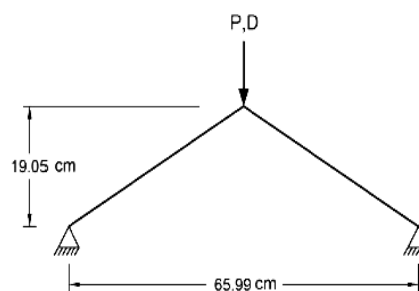


Fig. 2. Truss TR1

شکل ۳. نمودار بار- تغییر مکان خرابی TR1

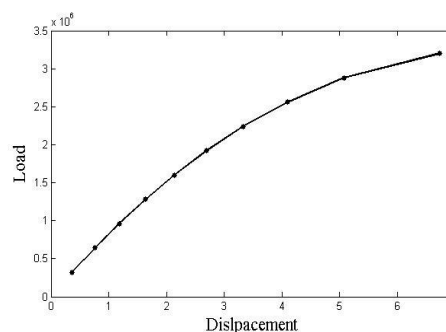


Fig. 3. Load-displacement curve of Truss TR1

۲-۵- خرابی چن

خرپای شکل (۴) خرابی چن نام دارد. این خرپا ۲۸ درجه آزادی دارد. مقادیر EA ، K و P ، به ترتیب، مقدارهای مقیاس شده 1 ، 9000 و 5 دارند [24]. برای این خرپا، نمودار بار-تغییر مکان در شکل (۵) نشان داده شده است و رفتار شدید ناخطی را نشان می دهد. روش پیشنهادی توانایی تحلیل چنین رفتار ناخطی را دارد. جدول (۲)

جدول ۲. نتایج تحلیل خرابی چن

Type of Structure	Number of Degree of Freedoms	Method	Number of iterations		
			Proposed method (Concentrated Damping)	Kinetic Damping	Traditional Damping
Chen's Truss	28	Linear	640	692	2003
		Nonlinear	8489	12386	29164

Table 2. The analysis results of Chen Truss

۳-۵- خرابای گنبدی

و میرایی جنبشی دارد. مقادیر 10^{-4} و 10^{-9} به ترتیب خطای تغییر مکان و سرعت برای این نمونه است.

هندسه‌ی خرابای گنبدی انتخاب شده در شکل (۶) به نمایش در آمده است. شکل (۷) نیز نمودار بار- تغییر مکان این خرپا را با رفتار شدید ناخطی هندسی نشان می‌دهد. نمودار پاسخ نزدیک به دقیق خیز خرپا هم بر اساس مرجع [26] با خط‌چین رسم شده است. همان‌گونه که پیش از این درج شد، محاسبه‌ی عامل‌های میرایی و جرم یک شاخه و پیمایش مسیر ایستایی شاخه‌ای دیگر از پژوهش‌های روش رهایی پویا را شکل می‌دهد. کار حاضر روی بخش اول متمرکز می‌باشد و فرآیند بار افزون را به کار گرفته است. از این رو، توانایی پیمودن مسیر برگشت بار را ندارد و یک پرش در نمودار بار تغییر مکان مشاهده می‌شود. به سخن دیگر، رفتار مزبور از شیوه‌ی پیشنهادی به وجود نیامده است. در این نمونه، ضریب کشسانی $21 \times 10^4 \text{ N/m}^2$ و سطح مقطع عضوهای خرپا برابر 450 mm^2 پنداشته شده‌اند [26]. بیشینه‌ی بار وارد بر این خرپا معادل 9 kN است. بر اساس داده‌های جدول (۳)، روش پیشنهادی عملکرد بسیار خوبی نسبت به دو روش رهایی پویای سنتی

شکل ۶. نمودار بار-تغییر مکان خرابای گنبدی

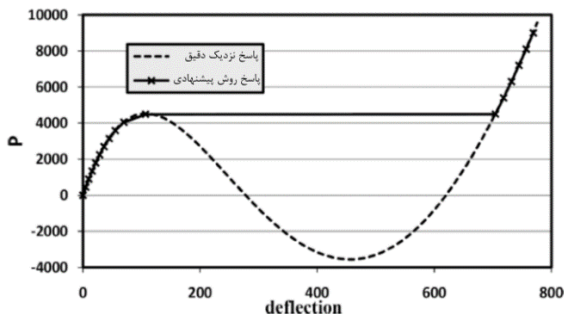


Fig. 6. Load-displacement curve of the geodesy dome

شکل ۷. خرابای گنبدی (طول‌ها بر حسب میلی‌مترند)

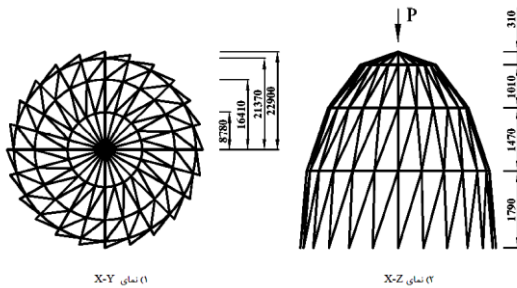


Fig. 7: The geodesy dome

جدول ۳. نتایج تحلیل خرابای گنبدی

Type of Structure	Number of Degree of Freedoms	Method	Number of iterations		
			Proposed method (Concentrated Damping)	Kinetic Damping	Traditional Damping
Geodesy dome	219	Linear	108	149	249
		Nonlinear	1179	1721	3032

Table 3. The analysis results of the geodesy dome

جدول ۴. نتایج تحلیل قاب فولادی ۵ طبقه

Type of Structure	Number of Degree of Freedoms	Method	Number of iterations		
			Proposed method (Concentrated Damping)	Kinetic Damping	Traditional Damping
Five-story steel frame	219	Linear	325	268	357
		Nonlinear	2072	2191	4181

Table 4. The analysis results of the five-story steel frame

۵-۵- قاب مستوی

قاب مستوی شکل (۱۰) آخرین مساله‌ای است که برای بررسی شیوهی پیشنهادی انتخاب شده است. این قاب دو عضو دارد که هر کدام با ۵ جزء الگوسازی شده‌اند. سطح مقطع عضوهای این قاب برابر $6 \times 10^{-4} m^2$ ، ضریب کشسانی آن $72 \times 10^4 kN/m^2$ و لنگر لختی مقطع برابر $2 \times 10^{-8} m^4$ است. بیشینه مقدار بار p نیز برابر با $30 kN$ است. جدول (۵) شمار تکرارهای تحلیل و شکل (۱۱) نمودار ایستایی قاب خمشی را نشان می‌دهد. مقدار خطای تغییر مکان و سرعت در تحلیل، به ترتیب، 10^{-4} و 10^{-9} است. شیوهی پیشنهادی در این سازه نیز رفتار بهتری را نشان می‌دهد.

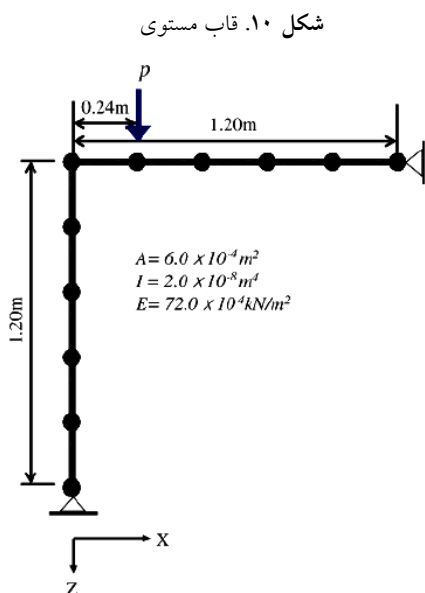


Fig. 10. The planar frame

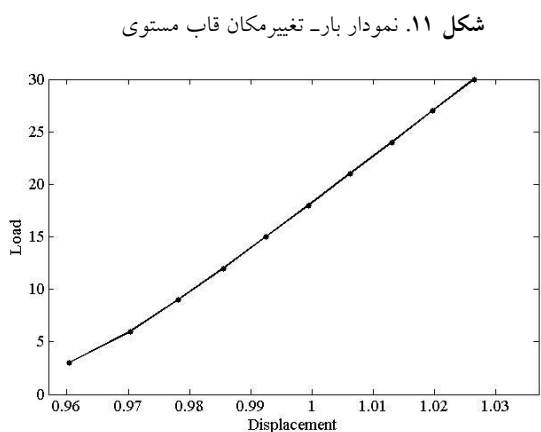


Fig. 11. Load-displacement curve of the planar frame

۵-۴- قاب فولادی ۵ طبقه

در این نمونه، به بررسی تحلیل قاب خمشی فولادی پرداخته می‌شود. مقطع‌های $W 1835$ و $W 2150$ ، به ترتیب، برای ستون‌ها و تیرها به کار رفته‌اند. شکل (۸) هندسه و بارگذاری قاب را نشان می‌دهد. ضریب کشسانی مقدار $200000 tonf/m^2$ دارد. جدول (۴) نیز نتایج تحلیل‌ها را نشان می‌دهد. روش پیشنهادی در این نمونه نیز شمار تکرار را نسبت به روش سنتی به طور قابل توجهی کاهش داده است. نمودار بار-تغییر مکان برای این قاب نیز در شکل (۹) نشان داده شده است. در این نمونه، خطای تغییر مکان و سرعت، به ترتیب، برابر 10^{-4} و 10^{-9} در تحلیل گرفته شده است.

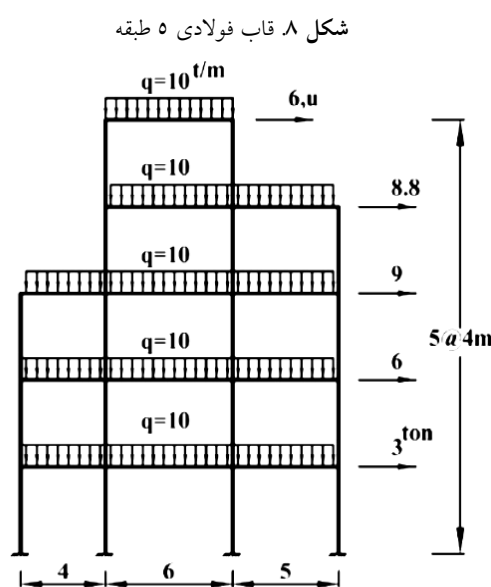


Fig. 8: The five-story steel frame

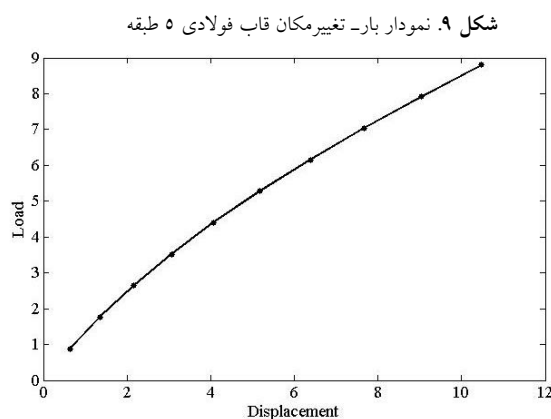


Fig. 9. Load-displacement curve of the five-story steel frame

۱۱- نمودار بار-تغییر مکان قاب مستوی

۹- نمودار بار-تغییر مکان قاب فولادی ۵ طبقه

جدول ۵. نتایج تحلیل قاب مستوی

Type of Structure	Number of Degree of Freedoms	Method	Number of iterations		
			Proposed method (Concentrated Damping)	Kinetic Damping	Traditional Damping
Planar frame	29	Linear	252	282	268
		Nonlinear	2008	2164	2562

Table 5. The analysis results of the planar frame

[4] Rezaiee-Pajand, M. Sarafrazi, S. R. and Rezaiee, H. (2012), "Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures", *Comput. Struct.*, vol. 112–113, pp. 295–310.

[5] Rushton, K. R. (1969), "Dynamic-relaxation solution for the large deflection of plates with specified boundary stresses", *J. Strain Anal. Eng. Des.*, vol. 4, no. 2, pp. 75–80.

[6] Brew, J. S. and Brotton, D. M. (1971), "Non-linear structural analysis by dynamic relaxation", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 3, no. 4, pp. 463–483.

[7] Wood, W. L. (1971), "Note on dynamic relaxation", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 3, no. 1, pp. 145–147.

[8] Bunce, J. W. (1972), "A note on the estimation of critical damping in dynamic relaxation", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 4, no. 2, pp. 301–303.

[9] Cundall, P. A. (1976), "Explicit finite-difference method in geomechanics", presented at the *Numerical Methods in Geomechanics*, Blacksburg, 1976, pp. 132–150.

[10] Topping, B. H. V. and Ivanyi, P. (2008), *Computer aided design of cable membrane structures*. Kippen, Stirlingshire, Scotland: Saxe-Coburg Publications.

[11] Cassell, A. C. and Hobbs, R. E. (1976), "Numerical stability of dynamic relaxation analysis of non-linear structures", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 10, no. 6, pp. 1407–1410.

[12] Frieze, P. A. Hobbs, R. E. and Dowling, P. J. (1978), "Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto-plastic analysis of plates", *Comput. Struct.*, vol. 8, no. 2, pp. 301–310.

[13] Papadrakakis, M. (1981) "A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 25, no. 1, pp. 35–48.

[14] Qiang, S. (1988), "An adaptive dynamic relaxation method for nonlinear problems", *Comput. Struct.*, vol. 30, no. 4, pp. 855–859.

[15] Al-Shawi, F. A. N. and Mardirosian, A. H. (1987), "An improved dynamic relaxation method for

۵- نتیجه گیری

این مقاله روش جدیدی را برای محاسبه میرایی ساختگی در روش رهایی پویا ارائه نمود. در این شیوه، گام زمانی ثابت و عامل میرایی به جز در گام‌های زمانی با بیشترین مقدار کارمایه، برابر صفر است. در گام زمانی که کارمایه بیشینه مقدار خود را دارد، میرایی به طور متمرکز بر سازه وارد شده و سبب کمینه کردن کارمایه می‌شود. در این صورت در همه گام‌ها نیاز به محاسبه میرایی نیست. راهکار مزبور شیوهی عمومیت یافته روش‌های سنتی و میرایی جنبشی است. به سخن دیگر، چنانچه میرایی در همه گام‌ها وارد شود شیوهی سنتی به دست می‌آید. اگر وارد کردن عامل میرایی محدود به گام‌های با کارمایه جنبشی بیشینه شود میرایی جنبشی به سامانه وارد شده است. افزون بر این، به سبب پاره‌ای تغییرهای رابطه‌سازی مساله‌های حل شده نشان می‌دهد که فن پیشنهادی می‌تواند شمار تکرارها را نسبت به روش سنتی و میرایی جنبشی کاهش دهد. هرچند به سبب استفاده از روش بار افزون توانایی پیمایش مسیر باربرداری را ندارد.

References

۶- مراجع

- [1] Sarafrazi S.R. Numerical integration for structural dynamic analysis. Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirement for the degree of doctor of philosophy, Ferdowsi University, Mashhad, Iran; 2010 (In Persian).
- [2] Frankel, S. P. (1950), "Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations", *Math. Tables Aids Comput.*, vol. 4, no. 30, pp. 65–75.
- [3] Otter, J. R. H. (1966), "Dynamic relaxation compared with other iterative finite difference methods", *Nucl. Eng. Des.*, vol. 3, no. 1, pp. 183–185.

- [21] Rezaiee Pajand, M. and Alamatian, J. (2005), "Best time step for geometric nonlinear analysis using dynamic relaxation", *Modarres Eng.*, vol. 19, No. 17, pp. 61-74 (In Persian).
- [22] Rezaiee Pajand, M. and Alamatian, J. (2009), "Dynamic relaxation method for tracing the statical path of truss structures", *J. Model. Eng.*, vol. 3, No. 17, pp. 27-39 (In Persian).
- [23] Rezaiee Pajand, M. and Alamatian, J. (2010), "The dynamic relaxation method using new formulation for fictitious mass and damping", *Struct. Eng. Mech.*, vol. 34, No. 1, pp. 109-133.
- [24] Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S. R. (2011), "Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping", *Comput Struct*, vol. 89, no. 13-14, pp. 1274-1285.
- [25] Rezaiee-Pajand, M. and Rezaiee, H. (2011), "A technique for improving dynamic relaxation method", *J. Model. Eng.*, vol. 9, no. 24, pp. 39-52 (In Persian).
- [26] M. Rezaiee-Pajand and S. R. Sarafrazi, (2010), "Nonlinear structural analysis using dynamic relaxation method with improved convergence rate", *Int. J. Comput. Methods*, vol. 07, no. 04, pp. 627-654.
- the analysis of plate bending problems", *Comput. Struct.*, vol. 27, no. 2, pp. 237-240.
- [16] Zhang, L. G. and Yu, T. X. (1989), "Modified adaptive dynamic relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates", *Comput. Struct.*, vol. 33, no. 2, pp. 609-614.
- [17] Zhang, L. C. Kadkhodayan, M. and Mai, Y.-W. (1994), "Development of the maDR method", *Comput. Struct.*, vol. 52, no. 1, pp. 1-8.
- [18] Munjiza, A. Owen, D. R. J. and Crook, A. J. L. (1998), "An $M(M^{-1}K)^m$ proportional damping in explicit integration of dynamic structural systems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 41, no. 7, pp. 1277-1296.
- [19] Rezaiee Pajand, M. and Taghavian Hakkak, M. (2006), "Nonlinear analysis of truss structures using dynamic relaxation (research note)", *Int. J. Eng. - Trans. B Appl.*, vol. 19, no. 1, p. 11.
- [20] Kadkhodayan, M. Alamatian, J. and Turvey, G. J. (2008), "A new fictitious time for the dynamic relaxation (DXDR) method", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 74, no. 6, pp. 996-1018.

Dynamic Relaxation with Concentrated Damping in Structural Analysis

S.F. Labbafi¹, S.R. Sarafrazi^{2*}

1- M.Sc. Student, Department of Civil Engineering, University of Birjand

2- Assist. Prof., Department of Civil Engineering, University of Birjand

* srsarafrazi@birjand.ac.ir

Abstract:

Solving a system of linear or non-linear equations is required to analyze any kind of structures. There are many ways to solve a system of equations. They can be classified as implicit and explicit techniques. The explicit methods eliminate round-off errors and use less memory. The dynamic relaxation method (DRM) is one of the most powerful and simplest explicit processes. The important point is that DRM does not require storage of the global stiffness matrix. It only uses the residual loads vector.

Utilizing the virtual masses, damping and time steps, the DRM converts a system of static equations to dynamic ones. The process is started by assuming an initial solution. The next steps are performed in such a way that the residual forces are decreased. The proper value of fictitious mass and time step guarantees the convergence of the proposed DR procedure. On the other hand, the convergence rate depends on the value of damping factor, which is calculated using the lowest eigenvalue of artificial dynamic system in the common dynamic relaxation method. It is evidence; the dynamic system oscillates when damping is zero. The convergence of DRM with zero damping factors is achieved by utilizing kinetic damping or γ -damping. In the kinetic dynamic relaxation process, velocities of the joints are set to zero when a fall occurs in the level of total kinetic energy of the structure. However, it is difficult to calculate the extreme point of kinetic energy. Considering the peak point at the mid-point of the previous time-step, when a fall down occur in kinetic energy, topping is suggested. The factor γ in the γ -damping method is time step ratio of two sequence steps. The time-step ratio can be calculated in such a way that the responses converge to exact solutions.

In this paper, a comprehensive review of dynamic relaxation algorithms is presented. Of these, the popular and kinetic damping DR methods are described in detail. Then, the new dynamic relaxation algorithm is proposed. In this procedure, the artificial mass and time steps are similar to the DR methods that have been recently introduced. However, the damping factor is different with these methods. Damping factor is calculated in some specified steps. In other words, damping is zero in most of the DR algorithm steps. Therefore, the total number of calculations is reduced. The concentrated damping is imposed when the value of total kinetic energy of system is at its peak point. Utilizing the proper values of concentrated damping factors, the kinetic energy converges to zero. The presented formulation shows the relation between common and kinetic dynamic relaxation processes, too. It should be noted that the procedures of minimizing the kinetic energy of proposed method and Topping algorithm are different. The kinetic technique requires more calculations. Finally, some benchmark problems of truss and frame structures are selected. The linear and geometric nonlinear analyses are performed. The numerical results also show that the convergence rate of the new DRM increases in most of the cases with respect to kinetic damping and also popular damping.

Keywords: Traditional dynamic relaxation, Kinetic damping, Kinetic energy, concentrated damping