

# بررسی اثر فرم توابع نیروهای گرهی بر پاسخ مسائل الاستوستاتیک در روش نیمه تحلیلی معادلات مجزا

مهدی یزدانی<sup>۱\*</sup>

۱- دکترای مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

\*mahdi.yazdani@modares.ac.ir

تاریخ پذیرش: [۹۵/۰۳/۱۹]

تاریخ دریافت: [۹۴/۰۹/۲۱]

## چکیده

یکی از پرکاربردترین مسائل مربوط به مهندسی در مکانیک جامدات، مسائل الاستوستاتیک است. بسیاری از مسائل الاستوستاتیک به صورت تحلیلی قابل حل نیستند؛ از این رو، حل این مسائل با روش‌های عددی به یکی از مسائل مهم تبدیل شده است. این مقاله به بررسی یک روش جدید به نام روش معادلات مجزا در مسائل الاستوستاتیک می‌پردازد. روش معادلات مجزا یک روش نیمه تحلیلی با ماتریس ضرایب قطری است. در این روش، تنها مرز مسئله با استفاده از توابع شکل مرتبه بالا و توابع نگاشت چبیشی گسسته‌سازی می‌شود. در این روش، با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار و روش انتگرالی کلینشا-کورتیز، معادلات دیفرانسیل اولیه به صورت مجزا ایجاد می‌شود و در ادامه با تعریف بردار نیروهای گره‌ای، فرایند حل با استفاده از مفهوم بازتوزیع تنش صورت می‌گیرد. در این مقاله با تعریف فرم‌های جدیدی از بردار نیروهای گره‌ای، معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله الاستوستاتیک استخراج می‌شود و در نهایت، با حل دو نمونه عددی، روش معادلات مجزا در برابر فرم توزیع تنش در فضای مسئله مورد حساسیت‌سنجی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که در روش معادلات مجزا پاسخ مسائل الاستوستاتیک کاملاً وابسته به فرم توابع جدید بردار نیروهای گره‌ای است و بسته به نوع مسئله، در هر مسئله یک فرم خاص از بردار نیروهای گره‌ای دارای دقت بهینه است.

**واژگان کلیدی:** روش معادلات مجزا، مسائل الاستوستاتیک، بردار نیروهای گره‌ای، بازتوزیع تنش، مسائل دوبعدی.

## ۱- مقدمه

پیچیده‌تر در بسیاری از موارد، امکان‌پذیر نیست. از این رو مهندسان و ریاضیدانان، روش‌های جدیدی برای حل مدل‌های فیزیکی ابداع کردند و به صورت تقریبی این مسائل را حل نمودند که این روش‌های جدید به روش‌های عددی معروف شدند و در ادبیات فنی بیشتر به عنوان روش تفاضل محدود، روش‌های باقیمانده وزن‌دار و روش‌های وردشی به کار گرفته شده‌اند [1].

یکی از پرکاربردترین مسائل مربوط به مهندسی در مکانیک جامدات، مسائل الاستوستاتیک است. برای حل این دسته از مسائل نیز، روش‌های عددی گوناگونی مانند روش المان-

بشر همواره در پی پرده برداشتن از رازهای آفرینش بوده و در آغاز، تمام پژوهش‌های خود را با استفاده از سعی و خطا و امکانات آزمایشگاهی انجام داده است. هر پدیده‌ای در طبیعت را می‌توان با قوانین فیزیک برحسب معادلات جبری، دیفرانسیل و یا انتگرالی توصیف کرد. بنابراین هر مهندس دارای دو وظیفه عمده تشکیل روابط ریاضی فرایند فیزیکی و حل مدل ریاضی است. با وجود اینکه استخراج معادلات حاکم بر مسائل در بیشتر موارد کار چندان مشکلی نیست، حل آن به وسیله روش‌های تحلیلی کاری بسیار دشوار است و برای مدل‌های فیزیکی

## ۲- مبانی روش معادلات مجزا

در روش معادلات مجزا از چهار ابزار کلیدی استفاده می-شود تا ماتریس ضرایب معادلات حاکم قطری شده، و دستگاه معادلات حاکم به صورت مجزا و مستقل از هم نوشته شود. رسیدن به این هدف با استفاده از (۱) توابع شکل مرتبه بالا، (۲) توابع نگاشت چبیشف، (۳) روش انتگرال گیری کلینشا-کورتیز، و (۴) همچنین روند تولید فرم انتگرالی معادله حاکم بر مسئله مربوطه، مهیا شده است. به منظور مدل سازی هندسه و همچنین فیزیک مسئله در این روش، ابتدا یک نقطه به عنوان مرجع مختصات محلی (LCO) انتخاب شده، و تمام ویژگی های هندسی و فیزیکی مسئله نسبت به این نقطه ارزیابی می شود. در عین حال، فقط مرزهای مسئله با استفاده از المان هایی با یک بُعد کم تر از بُعد فضای مسئله المان بندی می شود. مطابق شکل (۱)، مشخصات یک هندسه دلخواه در دستگاه مختصات اصلی و دستگاه مختصات مقیاس شده نشان داده شده است.

شکل ۱. چگونگی مدل سازی مسائل دو بعدی؛ (الف) هندسه مسئله در مختصات کلی، (ب) هندسه مسئله دو بعدی در مختصات محلی [24]

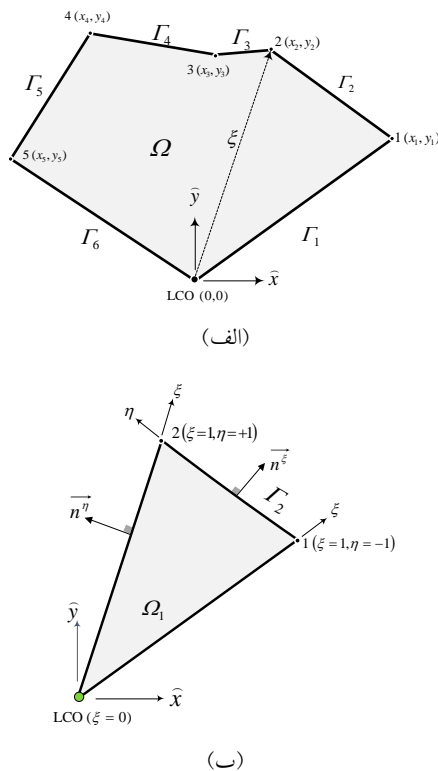


Fig. 1. Modeling of 2D bounded domain, in which the LCO is represented in (a) global and (b) local coordinates systems.

محدود، روش المان مرزی، روش المان محدود مرزی مقیاس-شده و روش های بدون مش تا کنون مورد استفاده قرار گرفته است. روش المان محدود به عنوان یک روش کلاسیک دارای قابلیت های خوبی در حل این دسته از مسائل است که به طور مفصل در مراجع [2-4] به آن پرداخته شده است.

بسیاری از پژوهشگران با استفاده از روش المان مرزی به حل مسائل گوناگونی در حوزه مسائل الاستواستاتیک پرداخته-اند که نمونه هایی از این ها را می توان در مراجع [5-14] مشاهده نمود. در مرجع [15] از ترکیب ویژگی های مثبت روش های المان مرزی و المان محدود و کاهش نقایص آنها روشی با عنوان روش المان محدود مرزی مقیاس شده را ایجاد کرده است؛ در این روش مانند روش المان مرزی فقط مرز مسئله مش بندی می شود ولی بر خلاف روش المان مرزی نیاز به یافتن حل اساسی ندارد. از این روش نیز برای حل مسائل الاستواستاتیک به صورت گسترده استفاده شده است [16-19]. علاوه بر روش های ارائه شده در بالا، برخی از پژوهشگران نیز با استفاده از روش های تحلیلی و نیمه تحلیلی گوناگون به حل مسائل الاستواستاتیک پرداخته اند که به عنوان نمونه می توان به مراجع [20-22] اشاره کرد.

یکی از این روش های نسبتاً جدید، روش معادلات مجزا است که به وسیله ی خاجی و همکاران پیشنهاد شده است، و برای حل مسائل مختلفی بررسی شده است. از مهمترین دست-آوردهای روش مزبور می توان به حل مسائل پتانسیل [23]، الاستواستاتیک [24-25]، الاستودینامیک [26]، انتشار امواج ارتجاعی [27] و مکانیک شکست [28] اشاره کرد. با توجه به اهمیت مسائل الاستواستاتیک، هدف این مقاله، بررسی اثر فرم بردار نیروهای گرهی بر پاسخ فضای مربوط به مسئله است. برای این منظور در بخش بعدی مقاله خلاصه ای از روش نیمه-تحلیلی معادلات مجزا ارائه می شود. بخش سوم مربوط به فرایند حل روش حاضر است. در بخش چهارم فرم جدیدی از توابع مختلف بردار نیروهای گرهی در روش معادلات مجزا پیشنهاد می شود. در بخش پنجم با استفاده از دو نمونه عددی این روش مورد حساسیت سنجی قرار می گیرد و سرانجام در بخش ششم دست آوردهای مقاله بیان می شود.

برای مقادیر  $n = 0, n_{\eta}$  مقدار  $c_n = 2$  می‌باشد. به این ترتیب، توابع نگاشت به دست آمده، دارای خاصیت دلتای کرونیگر در هر یک از گره‌ها است، یعنی:

$$\varphi_{\alpha}(\eta_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (۶)$$

نقاط گره‌ای  $\eta_n$  که در آنها  $n = 0, \dots, n_{\eta}$  است، نقاط چیبشی هستند که با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\eta_n = -\cos\left(\frac{n\pi}{n_{\eta}}\right) \quad (۷)$$

که در این رابطه، هر المان دارای  $n_{\eta} + 1$  گره است که با استفاده از آنها چندجمله‌ای‌هایی از درجه  $n_{\eta}$  برای درون‌یابی هندسه تولید می‌شوند.

به منظور استخراج روابط حاکم در مختصات محلی، به برخی از روابط پایه نیاز است. جزء سطح المان در مختصات کلی  $(d\hat{x}d\hat{y})$  با جزء سطح المان در مختصات محلی  $(d\xi d\eta)$  رابطه‌ای به صورت زیر دارد:

$$d\Omega = d\hat{x}d\hat{y} = |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \xi |J(\eta)| d\xi d\eta \quad (۸)$$

که در آن  $J(\xi, \eta)$  ماتریس ژاکوبی انتقال می‌باشد:

$$J(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi}(\xi, \eta) & \hat{y}_{,\xi}(\xi, \eta) \\ \hat{x}_{,\eta}(\xi, \eta) & \hat{y}_{,\eta}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (۹)$$

ماتریس ژاکوبی روی مرزها نیز با استفاده از روابط (۳) و (۴) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} x(\eta) & y(\eta) \\ x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (۱۰)$$

در مسائل دو بعدی ماتریس اپراتور مشتق  $[L]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} & 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \end{bmatrix}^T \quad (۱۱)$$

بنابراین، رابطه مشتق‌های بردار مذکور در دو دستگاه مختصات کلی و محلی با استفاده از رابطه زیر قابل بیان است:

$$[L] = [b^1(\eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} + [b^2(\eta)] \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (۱۲)$$

که در آن،

$$[b^1(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & -x(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

$$[b^2(\eta)] = \frac{1}{|J(\eta)|} \begin{bmatrix} -y(\eta) & 0 \\ 0 & x(\eta) \\ x(\eta) & -y(\eta) \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

با توجه به انتخاب محورهای محلی، مرزهای مسئله به طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شود؛ مرزهایی که امتداد آن‌ها از LCO می‌گذرند و روی محور شعاعی  $\xi$  قرار می‌گیرند، و مرزهایی که امتداد آن‌ها از LCO نمی‌گذرند (مرزهایی که موازی  $\eta$  هستند). در این روش، فقط باید مرزهای نوع دوم را المان‌بندی نمود. محدوده تغییرات محور مماسی  $\eta$  به صورت  $-1 \leq \eta \leq +1$  است. در مسائل محدود، تغییرات محور شعاعی  $\xi$  بین صفر (در LCO) و یک (بر روی مرزها) است.

در این روش، مختصات هر نقطه درون حوزه مسئله در مختصات کلی با  $(\hat{x}, \hat{y})$  مشخص می‌شود، درحالی‌که مختصات هر نقطه از مرزهای مسئله نیز با  $(x, y)$  تعیین می‌شود. به منظور انتقال هندسه مسئله از مختصات کلی  $(\hat{x}, \hat{y})$  به مختصات محلی  $(\xi, \eta)$ ، از توابع نگاشت که از نوع چندجمله‌ای‌های مرتبه بالای چیبش  $[\Phi(\eta)]$  است، استفاده می‌شود. بنابراین مختصات هر نقطه روی مرزهای مسئله با استفاده از توابع نگاشت به صورت رابطه‌های زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$x(\eta) = \sum_{i=1}^{n_{\eta}+1} \varphi_i(\eta) x_i \quad (۱)$$

$$y(\eta) = \sum_{i=1}^{n_{\eta}+1} \varphi_i(\eta) y_i \quad (۲)$$

که در روابط فوق،  $x$  و  $y$  مختصات نقاط روی مرز در دستگاه مختصات کلی است و  $n_{\eta}$  تعداد نقاط گره‌ای المان‌های روی مرز هستند. در این روش، مختصات هر نقطه درون حوزه مسئله با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{x}(\xi, \eta) = \xi x(\eta) = \xi \sum_{i=1}^{n_{\eta}+1} \varphi_i(\eta) x_i \quad (۳)$$

$$\hat{y}(\xi, \eta) = \xi y(\eta) = \xi \sum_{i=1}^{n_{\eta}+1} \varphi_i(\eta) y_i \quad (۴)$$

تابع نگاشت برای یک المان  $n_{\eta} + 1$  گره‌ای، با استفاده از چندجمله‌ای‌های چیبش به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\varphi_i(\eta) = \frac{2}{n_{\eta}} \sum_{n=0}^{n_{\eta}} \frac{1}{c_{(i-1)} c_n} T_n(\eta_{i-1}) T_n(\eta) \quad (۵)$$

که در آن،  $T_n(\eta)$  چندجمله‌ای چیبش نوع اول از مرتبه  $n$  است. همچنین برای مقادیر  $0 < n < n_{\eta}$  مقدار  $c_n = 1$  بوده، و

$$= [B^1(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}[B^2(\eta)]\{u(\xi)\} \quad (22)$$

که در آن

$$[B^1(\eta)] = [b^1(\eta)][N(\eta)] \quad (23)$$

$$[B^2(\eta)] = [b^2(\eta)][N(\eta)]_{,\eta} \quad (24)$$

همچنین با استفاده از قانون هوک، در مورد مولفه‌های تنش

در هر نقطه به مختصات  $(\xi, \eta)$  می‌توان گفت:

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D]\{\varepsilon(\xi, \eta)\} \quad (25)$$

$$\{\sigma(\xi, \eta)\} = [D] \left( [b^1(\eta)][N(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}[b^2(\eta)][N(\eta)]_{,\eta}\{u(\xi)\} \right) \quad (26)$$

که در رابطه‌های فوق،  $[D]$  بیانگر ماتریس خواص مصالح

می‌باشد.

معادله تعادل حاکم بر مسائل الاستوستاتیک دو بعدی به-

صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (27)$$

که در این رابطه  $\sigma_{ij}$  بیانگر اجزاء تانسور تنش دوبعدی

بوده و  $f_i$  نیز مولفه‌های نیروهای کالبدی اعمال شده بر فضای

مسئله هستند. لازم به گفتن است که در حالت دو بعدی مسائل

الاستوستاتیک،  $i = \hat{x}, \hat{y}$  و  $j = \hat{x}, \hat{y}$  است. معادله حاکم (27) را

می‌توان به فرم قوی و با استفاده از روش‌های تحلیلی، یا به فرم

باقیمانده وزن‌دار و به صورت عددی حل نمود. مبنای روش

ارائه شده برای حل مسائل، روش باقیمانده‌های وزن‌دار است،

بنابراین:

$$\int_{\Omega} w(\sigma_{ij,j} + f_i) d\Omega = 0 \quad (28)$$

با حل انتگرال فوق با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار

معادله تعادل در روش معادلات مجزا به صورت رابطه (29)

استخراج می‌شود [24].

$$\xi[D^0]\{u(\xi)\}_{,\xi\xi} + [D^1]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \xi\{F^b(\xi)\} = 0 \quad (29)$$

که ماتریس‌های ضرایب و بردار موجود در رابطه بالا، به

صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[D^0] = \int_{-1}^{+1} [B^1(\eta)]^T [D][B^1(\eta)] |J(\eta)| d\eta \quad (30)$$

$$[D^1] = \int_{-1}^{+1} [B^2(\eta)]^T [D][B^1(\eta)]_{,\eta} |J(\eta)| d\eta \quad (31)$$

$$\{F^b(\xi)\} = \int_{-1}^{+1} [N(\eta)]^T \{f^b(\xi)\} |J(\eta)| d\eta \quad (32)$$

که در رابطه اخیر،  $\{F^b(\xi)\} = [F_x^b \ F_y^b]^T$  بردار نیروهای

کالبدی در گره‌ها است. در معادله دیفرانسیل (29) ماتریس‌های

به منظور محاسبه ترکشن در هر امتداد، نیاز به دانستن بردار

نرمال در آن امتداد است. بردار نرمال عمود بر سطح  $\{n\}$  بر

روی مرزهای مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{n\} = \frac{1}{|\Delta\vec{x}|} \Delta\vec{x} \quad (15)$$

با استفاده از روابط (3، 4 و 15) برای دو امتداد  $\xi$  و  $\eta$  را

می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[n^\xi(\eta)] = \frac{1}{\left| \begin{matrix} y(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} \end{matrix} \right|} \begin{bmatrix} y(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & -x(\eta)_{,\eta} \\ -x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[n^\eta(\eta)] = \frac{1}{\left| \begin{matrix} -y(\eta) \\ x(\eta) \end{matrix} \right|} \begin{bmatrix} -y(\eta) & 0 \\ 0 & x(\eta) \\ x(\eta) & -y(\eta) \end{bmatrix} \quad (17)$$

در این روش، از توابع شکل با ویژگی‌های خاصی استفاده

می‌شود که در حالت کلی با  $[N(\eta)]$  نشان داده می‌شوند. درون-

یابی توابع بر روی مرزها با استفاده از این توابع شکل انجام

می‌گیرد که دارای دو ویژگی مهم هستند؛ یکی اینکه در نقاط

گره‌های المان‌ها دارای خاصیت دلتای کرونیگر است، و دیگری

این‌که مشتق اول آن‌ها نسبت به محورهای محلی مماسی در

تمام گره‌ها برابر صفر است:

$$N_{\alpha}(\eta_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (18)$$

$$N_{\alpha,\beta}(\eta_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (19)$$

توابع شکل پیشنهادی برای یک المان  $n_{\eta} + 1$  گره‌ای، یک

چندجمله‌ای از مرتبه  $2n_{\eta} + 1$  به صورت رابطه زیر است که

دارای پارامتر مجهول است.

$$N_i(\eta) = \sum_{m=0}^{2n_{\eta}+1} a_m \eta^m = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \dots + a_{2n_{\eta}+1} \eta^{2n_{\eta}+1} \quad (20)$$

ضرایب ثابت فوق با اعمال شرایط رابطه‌های (18) و (19)

تعیین می‌شود. مولفه‌های تغییرمکان در هر نقطه از فضای مسئله

به مختصات  $(\xi, \eta)$  که به صورت

$$\{u(\xi, \eta)\} = [u_x(\xi, \eta) \ u_y(\xi, \eta)]^T$$

توابع شکل برحسب تغییرمکان گره‌های واقع بر المان‌های روی

مرز با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه هستند:

$$\{u(\xi, \eta)\} = [N(\eta)]\{u(\xi)\} [u_x(\xi) \ u_y(\xi)]^T \quad (21)$$

با استفاده از روابط (13 و 14)، مولفه‌های کرنش در نقطه

$(\xi, \eta)$  در فضای مسئله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\{\varepsilon(\xi, \eta)\} = [\varepsilon_x(\hat{x}, \hat{y}) \ \varepsilon_y(\hat{x}, \hat{y}) \ \varepsilon_{xy}(\hat{x}, \hat{y})]^T$$

نام می‌توان محاسبه نمود. با توجه به این‌که نقطه مشترک تمام گره‌ها، نقطه LCO است و از نقطه نظر تغییر مکان، این نقطه دارای مولفه‌های تغییر مکانی یکسان برای تمام گره‌ها است، بنابراین، می‌توان تصور نمود که تعدادی فنر با سختی‌های مشخص در نقطه LCO به صورت موازی به هم متصل شده‌اند و سر دیگر این فنرها به گره‌های روی مرز مسئله متصل است مطابق شکل (۲)؛ به عبارت دیگر، مقدار تنش داخلی در نقطه LCO برابر با مجموع تنش‌های رسیده به این نقطه از طرف تمام درجات آزادی که تحت بارگذاری قرار دارند است.

گام بعدی بر اساس توضیحات ارائه شده، محاسبه برآیند

تنش داخلی در LCO است که برابر خواهد بود با:

$$\{\sigma_{LCO}\} = \sum_{i=1}^n \{\sigma_{LCOi}\} \quad (38)$$

همچنین سهم هریک از گره‌ها با توجه به باز توزیع تنش در نقطه مرجع در این تنش داخلی در LCO از رابطه (۳۹) محاسبه می‌شود:

$$\{\sigma_{LCOi}\} = \frac{D_{ii}^0}{\sum_{j=1}^n D_{jj}^0} \{\sigma_{LCO}\} \quad (39)$$

شکل ۲. مفهوم فیزیکی باز توزیع تنش در مسائل الاستوستاتیک

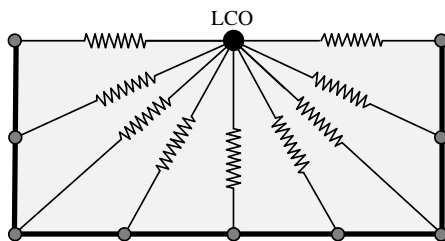


Fig. 2. The physical concept of the solution procedure of the problem.

حال باید در گام بعدی معادله حاکم را بر اساس تنش داخلی LCO به عنوان نیروی کالبدی در امتداد  $\xi$  رابطه (۳۹) به ازای هر درجه آزادی دوباره محاسبه نمود تا مولفه‌های تغییر مکان مربوط به هر گره در امتداد محور  $\xi$  محاسبه شود، بنابراین:

$$\{f_i^b(\xi)\} = [n^T] \{\sigma_i(\xi)\} \quad (40)$$

در گام پایانی و با مشخص شدن تابع مولفه‌های تغییر مکان برای هر گره در امتداد محور  $\xi$ ، پاسخ برای سایر نقاط، با استفاده از توابع شکل درونیابی می‌شوند، همچنین میزان تنش

ضرایب ثابت با استفاده از روش انتگرال‌گیری کلنشا-کورتیس محاسبه شده است. استفاده از این روش انتگرال‌گیری به همراه توابع شکل و نگاشت ویژه معرفی شده سبب تولید ماتریس-های ضرایب قطری می‌شود [23-28]؛ یعنی:

$$D_{ij}^0 = 2\delta_{ij}[B^1(\eta_i)]^T [D][B^1(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (33)$$

$$D_{ij}^0 = 2\delta_{ij}[B^2(\eta_i)]^T [D][B^2(\eta_i)] |J(\eta_i)| \quad (34)$$

که در رابطه‌های فوق،  $\delta_{ij}$  دلتای کرونیکر است. بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه (۲۹) را می‌توان به صورت مجزا به ازای هر درجه آزادی  $i$  نوشت:

$$\xi D_{ii}^0 u(\xi)_{i,\xi\xi} + D_{ii}^1 u(\xi)_{i,\xi} + \xi F_i^b(\xi) = 0 \quad (35)$$

### ۳- فرایند حل مسئله

حال باید پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم در رابطه (۳۵) تعیین شود؛ با توجه به این‌که در حالت کلی معادله دیفرانسیل حاکم بر مسائل دوبعدی ثابت است، بنابراین پاسخ کلی معادله دیفرانسیل (۳۵) به ازای درجه آزادی نام را با استفاده از تابع  $F_i^b(\xi)$  می‌توان محاسبه کرد. در مبانی روش معادلات مجزا برای حل مسائل الاستوستاتیک فرض می‌شود که تابع نیروهای کالبدی به صورت خطی از نقطه مرجع تا مرز مسئله تغییر می‌کند. بدین ترتیب می‌توان نوشت:

$$F_i^b(\xi) = a_i \xi + b_i \quad (36)$$

بنابراین با اعمال رابطه (۳۶) در معادله دیفرانسیل رابطه

(۳۵)، رابطه (۳۷) استخراج می‌شود:

$$u_i(\xi) = \frac{A_i \xi \left( \frac{D_{ii}^0 - D_{ii}^1}{D_{ii}^0} \right) + B_i}{D_{ii}^0 - D_{ii}^1} + \frac{4b_i}{6(D_{ii}^0 + 2D_{ii}^1)} \xi^3 - \frac{4a_i}{2(D_{ii}^0 + 2D_{ii}^1)} \xi^2 \quad (37)$$

در رابطه (۳۷)، مقادیر  $A_i$  و  $B_i$  با اعمال شرایط مرزی مرتبط با درجه آزادی  $i$  بدست می‌آید. در گام نخست، رابطه فوق فقط برای گره‌هایی که تحت بارگذاری قرار دارند محاسبه و سپس، رابطه تغییرات تنش برای هریک از درجات آزادی گفته شده در امتداد محور  $\xi$  با استفاده از رابطه (۲۶) تعیین می‌شود. سپس، با استفاده از روابط تعادل، مقدار مولفه‌های نیروهای داخلی متمرکز مرتبط با هر گره در امتداد محور  $\xi$  و همچنین میزان تنش داخلی در نقطه LCO ( $\sigma_{LCOi}$ ) را برای گره

۵-۱- نمونه اول

نمونه اول مربوط به یک تیر طره‌ای است. همان‌گونه که در شکل (۳) مشاهده می‌شود، تیر طره‌ای به طول ۱۲۰ متر، ارتفاع ۲ متر و ضخامت ۱ متر تحت بار برشی در انتهای آزاد خود در شرایط تنش مسطح قرار گرفته است. ضریب کشسانی و ضریب پواسون مصالح در این نمونه به ترتیب برابر ضریب کشسانی و  $E = 2100 \text{ N/m}^2$  و  $\nu = 0.3$  در نظر گرفته شده است. حل تحلیلی این مسئله در مرجع [24] ارائه شده است.

شکل ۳. هندسه تیر طره‌ای نمونه اول

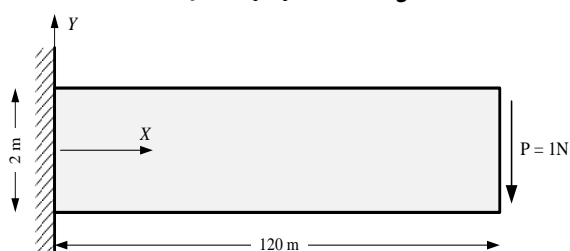


Fig. 3. Geometry and boundary conditions in global Cartesian coordinates of first example.

به منظور مدل‌سازی هندسه این مسئله، همان‌گونه که در شکل (۴) نشان داده شده است، مرکز مختصات محلی (LCO) در نقطه  $(0,0)$  انتخاب شده است و مرزهای مسئله با استفاده از ۲۷ المان سه گرهی و در مجموع ۱۰۶ درجه آزادی المان‌بندی شده است.

شکل ۴. المان‌بندی مربوط به نمونه اول

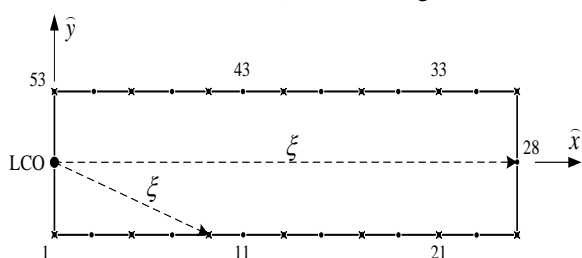


Fig. 4. The LCO and proposed mesh using three-node elements. of first example.

با استفاده از توابع دلخواه پیشنهاد شده در بخش چهارم و استفاده از مبانی روش معادلات مجزا که در بخش دوم و سوم بیان شد، ابتدا فرم جدید معادله دیفرانسیل مطابق رابطه (۳۵) استخراج می‌شود. در ادامه با حل معادله دیفرانسیل مربوطه با استفاده از توابع مختلف نیروهای کالبدی، میدان جابه‌جایی برای هر درجه آزادی محاسبه می‌شود. برای مقایسه نتایج

در هر نقطه از حوزه مسئله نیز با استفاده از رابطه (۲۶) تعیین می‌شود.

۴- تابع نیروهای کالبدی

با توجه به اینکه در روش معادلات مجزا پاسخ برای هر درجه آزادی به صورت مجزا محاسبه می‌شود، برای ارتباط بین درجات آزادی از مفهوم بازتوزیع تنش استفاده می‌شود. این مفهوم بر این اساس ارائه شده است که در آن گره‌هایی که تحت اثر بارگذاری قرار نگرفته‌اند، با استفاده از فرایند بازتوزیع تنش از گره‌هایی که تحت اثر بارگذاری قرار دارند، سهم خود را دریافت نمایند. در فرایند بازتوزیع تنش با محاسبه تنش در نقطه مرجع، تنش به صورت نیروی کالبدی در فضای مسئله توزیع می‌شود و بنابراین پاسخ هر درجه آزادی محاسبه می‌شود. با فرض تابع نیروهای گره‌ای به صورت خطی، تاکنون مسائل مختلفی با روش معادلات مجزا حل شده است و نتایج به دست آمده نیز از دقت مناسبی برخوردار بوده‌اند. هدف این مقاله ارائه توابع مختلف برای توزیع تنش در فضای مسئله و بررسی اثر فرم تابع نیروهای گره‌ای بر پاسخ مسائل الاستوستاتیک است. برای این منظور علاوه بر فرم خطی  $F_1^b(\xi) = a\xi + b$  فرم‌های پیشنهاد شده در روابط زیر برای بیان تابع نیروهای گره‌ای برای حل مسائل الاستوستاتیک در نظر گرفته می‌شود:

$$F_2^b(\xi) = a\xi^2 + b \quad (41)$$

$$F_3^b(\xi) = a\xi^3 + b \quad (42)$$

$$F_4^b(\xi) = a\sqrt{\xi} + b \quad (43)$$

$$F_5^b(\xi) = \frac{a}{e}\xi e^\xi + b \quad (44)$$

در ادامه با جایگذاری روابط (۴۱ تا ۴۴) در رابطه (۳۵)، معادله حاکم برای هر یک از توابع پیشنهاد شده استخراج شده و با حل روابط به دست آمده، پاسخ مسئله برای هر درجه آزادی مطابق با فرایند ارائه شده در بخش سوم محاسبه خواهد شد.

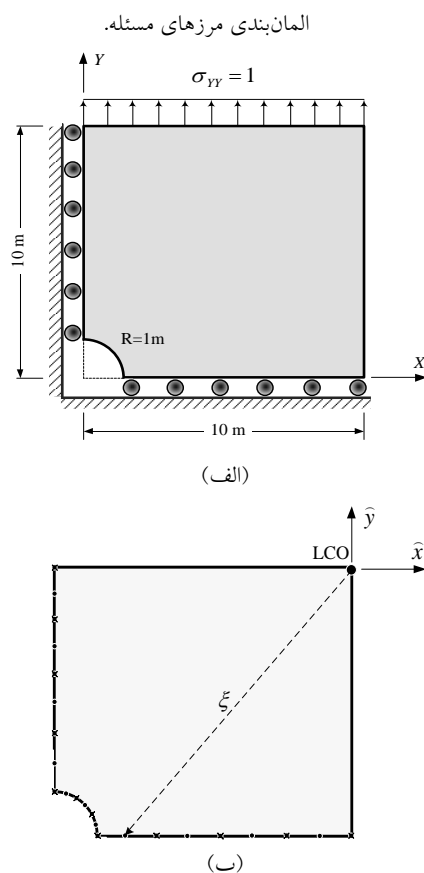
۵- نمونه‌های عددی

برای بررسی اثر فرم تابع نیروهای گره‌ای بر پاسخ مسئله، دو نمونه در این بخش ارائه خواهد شد.

تحلیلی ارائه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود نتایج حاصل از این روش با در نظر گرفتن تابع نیروهای گره‌ای به فرم  $F_4^b(\xi) = a\sqrt{\xi} + b$  هماهنگی بسیار خوبی با نتایج تحلیلی دارد. در این مسئله وجود سوراخ در یک صفحه که تحت تنش قرار دارد باعث ایجاد تمرکز تنش در اطراف آن سوراخ می‌شود، بنابراین تابع خطی استفاده شده در روش معادلات مجزا کلاسیک برای توزیع تنش در فضای مسئله دقت تابع  $F_4^b(\xi) = a\sqrt{\xi} + b$  را ندارد. استفاده از توابع مختلف بردار نیروهای گره‌ای در روش حاضر، میزان افزایش تنش در دهانه سوراخ، مطابق جدول (۱) محاسبه شده است.

بنابراین می‌توان گفت در برخی از مسائل مکانیک جامدات که شرایط خاصی را در بر دارند، برای حصول نتایج بهینه، در گام نخست بهتر است یک تابع مناسب برای توزیع تنش در فضای مسئله پیشنهاد شود.

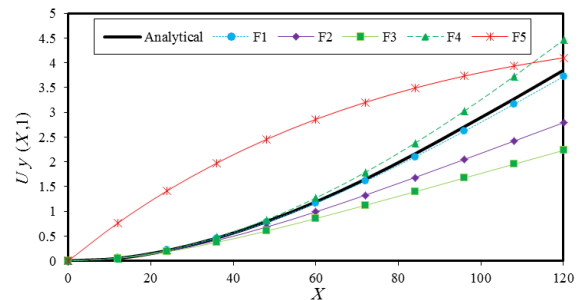
شکل ۶. نمونه دوم الاستوستاتیک؛ (الف) هندسه و بارگذاری و (ب)



**Fig. 6.** The second example: (a) geometry and boundary conditions in global Cartesian coordinates and (b) the LCO and proposed mesh including.

حاصل از اثر توابع نیروهای کالبدی بر میدان جابه‌جایی، جابه‌جایی در وسط تیر و در جهت قائم مطابق شکل (۵) با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. همان‌گونه که مشخص است، تابع  $F_1^b(\xi) = a\xi + b$  که یک چندجمله‌ای کامل مرتبه اول است، از سایر توابع دارای دقت مناسب‌تری است.

شکل ۵. جابه‌جایی قائم تیر یک سرگیردار در وسط تیر ( $y = 0$ )



**Fig. 5.** The numerical results and the analytical solution of the vertical displacement of the beam of example 1, along the X-axis at (Y=0).

۲-۵- نمونه دوم

به منظور ارزیابی روش پیشنهاد شده در مدل‌سازی مسائل دارای تمرکز تنش، مسئله صفحه‌ای سوراخ‌دار که مانند شکل (۶ الف)، تحت تنش عمود بر یکی از لبه‌های خود قرار گرفته حل می‌شود. به دلیل متقارن بودن مسئله، فقط ربع فضای مسئله (مانند آنچه که در شکل (۶ ب) نشان داده شده است)، با اعمال شرایط مرزی اضافی بررسی شده است. در این مسئله، لبه راست و لبه داخل سوراخ دایروی بدون تنش هستند. این صفحه از مصالحی با مدول الاستیسیته  $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.33$  در نظر گرفته می‌شود. بر اساس آن-چه در شکل (۶ ب) نشان داده شده است، محل مرکز مختصات محلی (LCO) در نقطه  $(10, 10)$  انتخاب شده است. دو لبه مسقیم صفحه که در پایین و سمت راست قرار گرفته‌اند، هر کدام با استفاده از چهار المان ۳ گرهی و لبه دایروی شکل نیز با ۳ المان سه گرهی المان‌بندی شده است و به طور کلی این مسئله با استفاده از ۴۶ درجه آزادی حل می‌شود.

موفه‌های مختلف تنش درون این صفحه با استفاده از روش‌های حل تحلیلی در مرجع [24] ارائه شده است. در شکل (۷) تغییرات تنش افقی در امتداد محور قائم که با استفاده از روش معادلات مجزا محاسبه شده است، در مقابل نتایج روش

گره‌ای برای به دست آوردن نتایج بهینه ضروری به نظر می‌رسد.

## References

[1] Zienkiewicz O.C. & Taylor R.L. 2000 *The Finite Element Method*, Oxford, 2nd edn, Butterworth and Heinmann.

[2] Rashid M.M. & Selimotic M. A. 2006 three-dimensional finite element method with arbitrary polyhedral elements. *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, 67, 226–252.

[3] Denda M. & Wang C.Y. 2009 3D BEM for the general piezoelectric solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 198, 2950–2963.

[4] Papanicolopoulos S.A., Zervos A. & Vardoulakis I. 2009 A three-dimensional C1 finite element for gradient elasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, 77, 1396–1415.

[5] Zhang X. 2003 Exact integration in the boundary element method for two-dimensional elastostatic problems. *Earthquake engineering and engineering vibration*, 27, 987–997.

[6] Turteltaub S. & Turteltaub M. 2004 Integral representations in elastostatics and their application to an alternative boundary element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng*, 60, 1339–1359.

[7] Zhang X. 2004 Exact integrations of two-dimensional high-order discontinuous boundary elements of elastostatics problems. *Eng. Anal. Bound. Elem*, 28, 725–732.

[8] Zhang X. 2004 Exact integration for stress evaluation in the boundary element analysis of two-dimensional elastostatics. *Eng. Anal. Bound. Elem*, 28, 97–1004.

[9] Vodicka R., Mantic V. & Paris F. 2006 On the removal of the non-uniqueness in the solution of elastostatic problems by symmetric Galerkin BEM. *Int. J. Numer. Meth. Eng*, 66, 1884–1912.

[10] Wu T.W. 1997 Boundary integral equations in three-dimensional elastostatics using the Boussinesq-Cerruti fundamental solution. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(2), 94–102.

[11] Milroy J., Hinduja S. & Davey K. 1997 The elastostatic three-dimensional boundary element method: analytical integration for linear isoparametric triangular elements. *Applied Mathematical Modelling*, 21, 763–782.

[12] Poullikkas A., Karageorghis A. & Georgiou G. 2002 The method of fundamental solutions for three-dimensional elastostatics problems. *Computers and Structures*, 80, 365–370.

[13] Masters N. & Ye W. 2004 Fast BEM solution for coupled 3D electrostatic and linear elastic problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, 1175–1186.

[14] Kitipornchai S., Liew K.M. & Cheng Y. 2005 A boundary element-free method (BEFM) for three-dimensional elasticity problems. *Comput Mech*, 36, 13–20.

## ۷- مراجع

شکل ۷. تغییرات تنش افقی نسبت به محور Y در X=0 برای مثال شماره

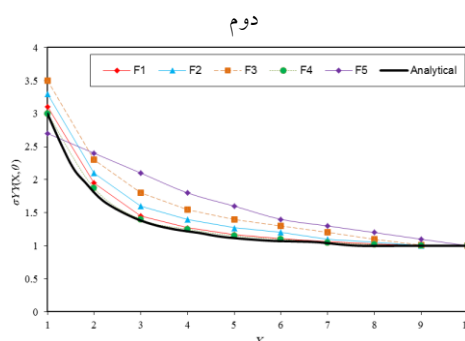


Fig. 7. Distribution of normal stresses along the boundary lines of the domain modeled in the second example (X=0).

جدول ۱. میزان افزایش تنش در دهانه سوراخ

Proposed Function	Stress Factor	Error (%)
Analytical Solution	3	---
$F_1^b(\xi)$	3.08	2.7
$F_2^b(\xi)$	3.27	9
$F_3^b(\xi)$	3.49	16.3
$F_4^b(\xi)$	3.02	0.7
$F_5^b(\xi)$	2.72	24

Table 1. the stress intensity of hole in second example.

## ۶- نتیجه گیری

یکی از پرکاربردترین مسائل مربوط به مهندسی در مکانیک جامدات، مسائل الاستوستاتیک است. برای حل این دسته از مسائل نیز، روش‌های عددی گوناگونی استفاده شده است. به تازگی روش نیمه تحلیلی جدیدی به نام روش معادلات مجزا برای حل مسائل پتانسیل، الاستوستاتیک، الاستودینامیک و مکانیک شکست توسعه داده شده است. در این مقاله با بررسی اثر فرم بردار نیروهای گرهی بر پاسخ فضای مربوط به مسئله، این روش مورد حساسیت‌سنجی قرار گرفت. در نهایت با حل دو نمونه عددی که در آن میدان جابه‌جایی و تنش در مسائل الاستوستاتیک بررسی شد، روش پیشنهادی مورد حساسیت‌سنجی قرار گرفت. نتایج حاکی از آن است که روش معادلات مجزا کاملاً وابسته به بردار نیروهای گره‌ای است، که در آن برای مسائل متداول فرم بردار نیروهای گره‌ای در روش معادلات مجزا کلاسیک از دقت مناسبی برخوردار است. این در حالی است که در مسائل خاص مانند ورق سوراخ‌دار، پیشنهاد یک تابع مناسب متناسب با فیزیک مسئله برای بردار نیروهای



- [23] Khaji, N. & Khodakarami, M. I. 2011 A new semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(6), 845-854.
- [24] Khodakarami, M. I. & Khaji, N. 2011 Analysis of elastostatic problems using a semi-analytical method with diagonal coefficient matrices. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(12), 1288-1296.
- [25] Khaji, N. & Khodakarami, M. I. 2012 A semi-analytical method with a system of decoupled ordinary differential equations for three-dimensional elastostatic problems. *International Journal of Solids and Structures*, 49(18), 2528-2546.
- [26] Khodakarami, M. I. Khaji, N. & Ahmadi, M. T. 2012 Modeling transient elastodynamic problems using a novel semi-analytical method yielding decoupled partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216(0), 183-195.
- [27] Khodakarami, M. I. & Khaji, N. 2014 Wave propagation in semi-infinite media with topographical irregularities using Decoupled Equations Method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 60, 102-112.
- [28] Khaji, N. & Yazdani, M. 2016 Determination of stress intensity factors of 2D fracture mechanics problems through a new semi-analytical method. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 39(4), 467-478.
- [15] Wolf J.P. 2004 *The scaled Boundary finite element method*. John Wiley & Sons Ltd, 1st edn.
- [16] Deeks A.J. & Wolf J.P. 2002 A virtual work derivation of the scaled boundary finite-element method for elastostatics. *Comput. Mech*, 28, 489-504.
- [17] Vu T.H. & Deeks A.J. 2006 Use of higher-order shape functions in the scaled boundary finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng*, 65, 1714-1733.
- [18] Vu T.H. & Deeks A.J. 2008 A p-hierarchical adaptive procedure for the scaled boundary finite element method. *Int. J. Numer. Meth. Eng*, 73, 47-70.
- [19] Vu T.H. & Deeks A.J. 2008 A p-adaptive scaled boundary finite element method based on maximization of the error decrease rate. *Comput. Mech*, 41, 441-455.
- [20] Gao X.L. & Rowlands R.E. 2000 Hybrid method for stress analysis of finite three-dimensional elastic components. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 2727-2751.
- [21] Kucher V.A. & Markenscoff X. 2004 Stress formulation in 3D elasticity and application to spherically uniform anisotropic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 42, 3611-3617.
- [22] Theocaris P. S., Karayannopoulos N. & Tsamasphyros G. 1983 A numerical method for the solution of static and dynamic three-dimensional elasticity problems. *Computers & Structures*, 16 (6), 777-78.

# Sensitive Analysis of Nodal Force Function in the Elastostatic Problems in Decoupled Equations Method

Mahdi Yazdani<sup>1\*</sup>

1- PhD of Structural Engineering, Faculty of Civil and Environmental Eng., Tarbiat Modares University

\*mahdi.yazdani@modares.ac.ir

## Abstract:

The elastostatic problems are significant subjects in the analysis and design of solids and structures. As most of the complicated elastostatic problems do not have closed-form solutions, numerical methods such as finite element method (FEM), boundary element method (BEM), discrete element method (DEM), meshless methods, scaled boundary finite element method (SBFEM), and hybrid methods are the current approaches dealing with these types of engineering problems. This study presents a novel application of the decoupled equations method (DEM) to assess elastostatic issues. In the present method, the so-called local coordinate's origin (LCO) is selected at a point, from which the entire domain boundary may be observed. For the bounded domains, the LCO may be chosen on the boundary or inside the domain. Furthermore, only the boundaries which are visible from the LCO need to be discretized, while other remaining boundaries passing through the LCO are not required to be discretized. In this method, only the boundaries of problems are discretized using specific higher-order sub-parametric elements and higher-order Chebyshev mapping functions. Implementing the weighted residual method and using Clenshaw-Curtis quadrature result in diagonal Euler's differential equations. So, the coefficient matrices are diagonal, which provide a system of single Euler's differential equations for the  $i^{\text{th}}$  degree of freedom (DOF). If  $n$  indicates the number of DOFs of the problem assumed to be analyzed by the proposed method, only  $n$  Euler's differential equations (with only one unknown differential equation for each DOF) should be solved. In the proposed method, the LCO is the same for all nodes, for which the LCO has the same displacement components. Therefore, the physical concept of this fact may be considered as some semi-parallel springs adjoining each other at the LCO. Therefore, the proposed procedure is called "redistribution" of the stresses in the present method. At the final step, using the calculated displacement field along  $\xi$ , the displacement at any point of the problem's domain is interpolated by using the proposed special shape functions. Although the governing equation of each DOF is decoupled from those of other DOFs, the "redistribution" of the stresses at the LCO and resolving the problem for each DOF represent the connection between all DOFs of the domain. In the solution procedure, the order of displacement function  $u(\xi)$  depends on nodal force function  $F^b(\xi)$ . To analyze the elastostatic problems in the classical Decoupled Equations Method,  $F^b(\xi)$  varies in an undertaken domain like a body force. Therefore,  $F^b(\xi)$  is defined as a linear function. In this study by proposing new forms of force function, the response of elastostatic problems is assessed. In the following, sensitivity of this method via proposed nodal force functions is fully demonstrated through two benchmark problems. The results show that stress and displacement fields totally depend on the form of force function. Also, the results show that in order to get optimum results, it is necessary to propose an appropriate nodal force function corresponding to physical concept. For example in the cantilever beam - which is subjected to a shear force at its free end - minimum error occurs if the nodal force function is presented by linear form. On the other hands, in the Kirsch's problem - with a central small circular hole - considering the nonlinear form for nodal force function leads to minimum error.

**Keywords:** Decoupled equations method (DEM), elastostatic problems, redistribution stress, nodal force function, 2D Problems.